جامعة قسنطينة — مقياس(فيزياء1)

قسم الفيزياء (LMD) — السنة الجامعية 2013/2012

السلسلة رقم 04 : العمل والطاقة

التمرين 01: تتحرك نقطة مادية M في المستوي (Ox, Oy) تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تتعلق بالموقع وفق العلاقة :

$\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{\imath} + 3xy\,\vec{\jmath}$. نعتبر النقاط A(3,0) , B(4,0) , C(3,4) .

أحسب عمل القوة عندما تنتقل M من O إلى C :

1- على المستقيم OC . 2- على المستقيم AO ثم CA .3- على المستقيم BO ثم BC . ما هي طبيعة القوة $\vec{F}$ ؟

التمرين 02: نقطة مادية M كتلتها m تتحرك فوق مسار دائري أملس (من دون احتكاك) نصف قطره R تحت تأثير قوة الثقل.

1- تترك النقطة M بدون سرعة ابتدائية في النقطة A (انظر الشكل 1).

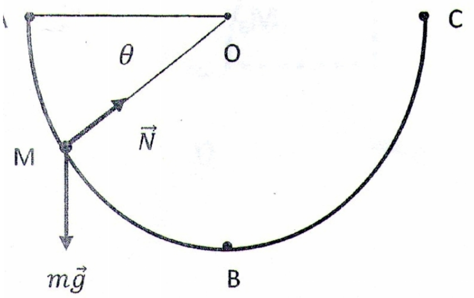
أ- حدد عند النقطة الكيفية M القوى المنتجة للعمل والقوى غير المنتجة للعمل.

ب- إذا علمت أن الانتقال العنصري في الإحداثيات القطبية يكتب من الشكل : $\overrightarrow{dl} = d\rho\overrightarrow{U_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{U_\theta}$ ، اكتب عبارة العمل العنصري ثم استنتج العمل المنجز بين الموقعين A و B.

ج - باستعمال نظرية الطاقة الحركية، استنتج السرعة عند النقطة B.

2- حدد القوى المحافظة ثم استنتج الطاقة الكامنة المشتقة منها.
استنتج مرة ثانية قيمة السرعة عند النقطة B باستعمال مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية (الكلية).

3- هل تصل M إلى النقطة C وما هي قيمة السرعة عندها.



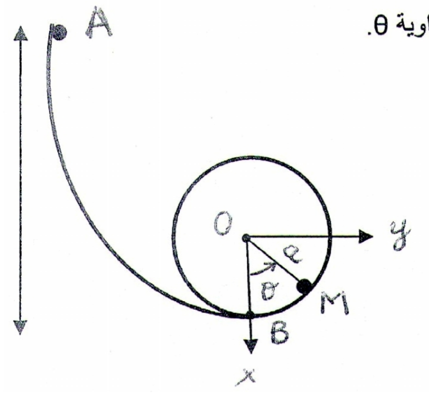
الشكل 1:التمرين الثاني

التمرين 03: تترك كرية كتلتها m من دون سرعة ابتدائية عند نقطة A توجد على ارتفاع h من سكة موجهة وضعيتها شاقولية و تنتهي بمسار دائري نصف قطره a . حركة الكرية تتم من دون احتكاك.

1- احسب السرعة V_B عند النقطة B ثم في نقطة كيفية M من الجزء الدائري معلمة بالزاوية θ.

2- اوجد قوة رد فعل السكة في نقطة M من الجزء الدائري للموجه.

3- حدد الارتفاع الأصغر h للنقطة A لكي تأخذ الكرية حركة دائرية على الموجه.

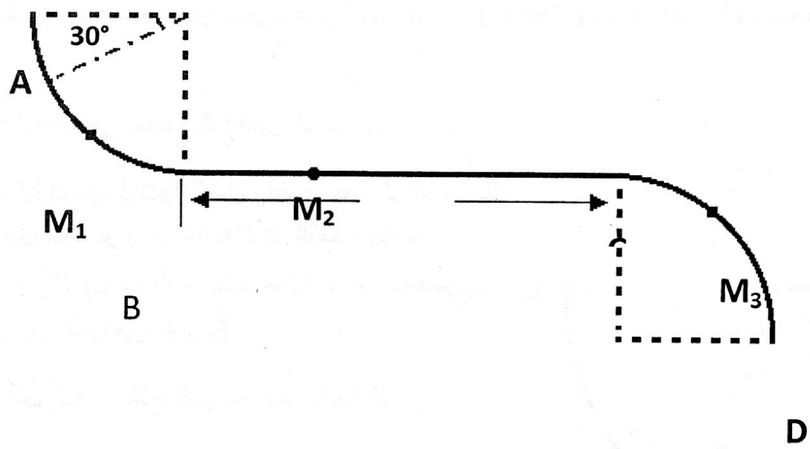


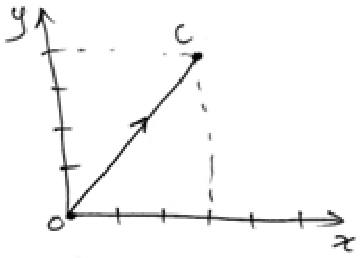
التمرين04: جسم كتلته **m** ينزلق على سطح موجه مشكل من ثلاثة أجزاء : **AB** جزء من دائرة نصف قطرها **R** ، و **BC** جزء مستقيم أفقي طوله **2R** ، و **CD** ربع آخر من دائرة لها نفس نصف القطر.. ينزلق الجسم بدون احتكاك على الجزئين **AB** و **CD** و على الجزء **BC** باحتكاك معامله **f**. نترك الجسم عند النقطة $A\ (\theta = 30°\ ,\ t = 0)$ بدون سرعة ابتدائية. أوجد :

1- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_1 من الجزء **AB** ، ثم استنتج السرعة عند النقطة **B**.

2- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_2 من الجزء **BC** ، أحسب السرعة عند النقطة **C**.

3- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية M_3 من الجزء **CD** ، أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم هذا السطح.





- التمرين الأول:

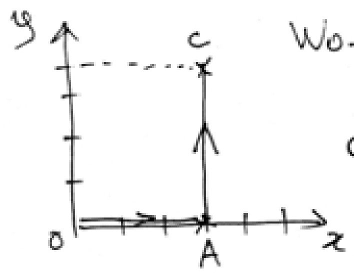
- حساب العمل حسب المسلك: $C \leftarrow O$

المسلك مستقيم معادلته $y = \frac{4}{3}x$

العمل العنصري يكتب: $dW = F_x dx + F_y \cdot dy$

يجب أن نكتب هذا التفاضل بدلالة متغير واحد حتى نستطيع حساب التكامل حسب معادلة المسار نكتب: $dy = \frac{4}{3}dx$ ثم نعوض

$$W_{O\to C} = \int_{x=0}^{x=3} (y^2 - x^2)\,dx + \int_{x=0}^{x=3} (3xy)\,dy = \int_0^3 \left(\frac{16}{9}x^2 - x^2\right) dx + \int 3x \cdot \left(\frac{4}{3}x\right) \cdot \frac{4}{3}dx$$



$$W_{O\to C} = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 + \frac{16}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 = \frac{55}{9} \cdot \left(\frac{27}{3}\right) = +55$$

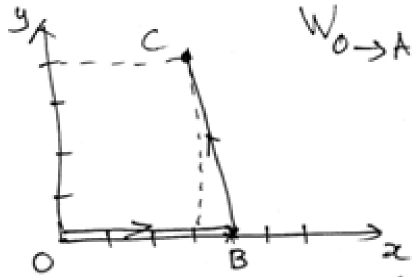
- حساب العمل حسب المسلك: $C \leftarrow A \leftarrow O$

من $A \leftarrow O$: $dW_{O\to A} = F_x dx \Leftarrow 0 = dy \Leftarrow y = 0$

من $C \leftarrow A$: $dW_{A\to C} = F_y dy \Leftarrow 0 = dx \Leftarrow x = 3$

ويكون العمل حسب هذا المسلك

$$W_{O\to A\to C} = \underset{O\to A}{\int_0^3} F_x dx + \underset{A\to C}{\int_0^4} F_y dy = \underset{O\to A}{\int_0^3} (-x^2)\,dx + \underset{A\to C}{\int_0^4} (3\times 3y)\,dy$$



$$W_{O\to A\to C} = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \left[\frac{9}{2}y^2\right]_0^4 = 72 - 9 = 63$$

- حساب العمل حسب المسلك: $C \leftarrow B \leftarrow O$

من $B \leftarrow O$: $dW_{O\to B} = F_x dx \Leftarrow 0 = dy \Leftarrow y = 0$

من $C \leftarrow B$: لدينا معادلة مستقيم يمر على B و C : $dy = -4dx \Leftarrow y = -4x + 16$

ويكون العمل حسب المسلك

$$W_{O\to B\to C} = \underset{O\to B}{\int_0^4} F_x dx + \underset{B\to C}{\int} F_x dx + \underset{B\to C}{\int} F_y dy$$

$$W_{O\to B\to C} = \int_{0}^{4}(-x^2)\,dx + \int_{B\to C}(y^2-x^2)\,dx + \int_{B\to C}3(xy)\,dy$$
$_{O\to B}$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^4 + \int_{4\,(B\to C)}^{3}\left[(-4x+16)^2-x^2\right]dx + \int_{4\,(B\to C)}^{3}3x\left[-4x+16\right](-4dx)$$

$$= -\frac{64}{3} + \int_{4\,(B\to C)}^{3}\left[15x^2-128x+256\right]dx + \int_{4\,(B\to C)}^{3}48\left[x^2-4x\right]dx$$

$$W_{O\to B\to C} = -\frac{64}{3} + \left[5x^3-64x^2+256x\right]_4^3 + \left[16x^3-2x^2\right]_4^3$$

$$= -\frac{64}{3} + \left[21x^3-66x^2+256x\right]_4^3 = -\left[\frac{64}{3}+571\right]$$

- نلاحظ أن الأعمال الثلاثة مختلفة نتيجة المسالك المختلفة وبالتالي فالقوة المطبقة هي قوة غير محافظة

- يمكن أن نتأكد من ذلك باستعمال المشتقات الجزئية للمركبات

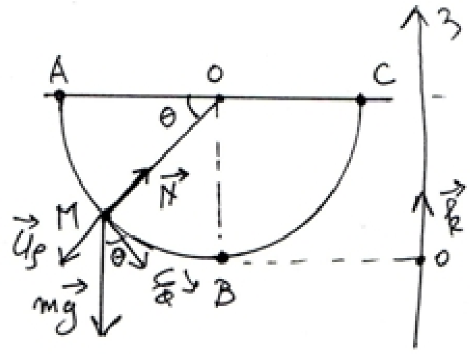
قوة محافظة $\Leftrightarrow$ $\left\{\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}\right\}$ $\not\Leftrightarrow$ قوة غير محافظة

نلاحظ أن:

$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 2y$ و $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 3y$ عدم المساواة

يعني أن القوة غير محافظة

-التمرين الثاني :-



1- أ - لدينا قوة الثقل وقوة رد الفعل $\vec{N}$ تكون عمودية على المسار الدائري وهي بالتالي عمودية على السرعة : $\vec{N} \perp \vec{V}$
أي عمودية على عنصر الإنتقال: $\vec{N} \perp d\vec{l}$ فهي لا تشارك في العمل وتبقى قوة الثقل هي التي تنتج العمل أثناء الحركة .

ب- في الإحداثيات القطبية : لدينا الإنتقال: $d\vec{l} = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho\, d\theta\, \vec{U}_\theta$
والقوة : $\vec{F} = F_\rho \vec{U}_\rho + F_\theta \vec{U}_\theta$ ، فيكون العمل العنصري :

$$dW = \vec{F}.d\vec{l} = F_\rho\, d\rho + F_\theta . \rho\, d\theta$$

لأن المسار دائري $(\rho = R) \Leftarrow d\rho = 0$ ويصبح : $dW = F_\theta R\, d\theta$

F_θ : هي مركبة الثقل حسب $\vec{U}_\theta$ (الشكل) : $F_\theta = mg\cos\theta$

فيكون الشكل النهائي للعمل العنصري: $dW = mgR\cos\theta\, d\theta$.

والعمل الناتج بين $A \to B$ هو :

$$W_{A\to B} = \int_{\theta_A=0}^{\theta_B=\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta\, d\theta$$

$$W_{A\to B} = mgR\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR$$

ج - نظرية الطاقة الحركية هي : $W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A)$

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 \quad (V_A = 0)$$

فنحصل على السرعة :

$$V_B = \sqrt{\frac{2W_{A\to B}}{m}} = \sqrt{2gR}$$

2- القوة المحافظة هي الثقل لأنه مشتق من الطاقة الكامنة حسب المحور $\vec{O3}$: فإن قوة الثقل تكتب : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$

يتعلق بالمتغير z: فقط لذلك نكتب الطاقة الكامنة

$$\vec{P} = -\vec{grad}\, E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

مع $\vec{P} = -mg\vec{k}$ ، نلاحظ أن $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ ، $\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$ ، الطاقة الكامنة دالة لـ z فقط:

$$-mg\vec{k} = -\frac{dE_p}{dz}\vec{k} \Rightarrow \frac{dE_p}{dz} = mg \Rightarrow E_p(z) = \int mg\, dz$$

فنحصل على الطاقة الكامنة: $E_p(z) = mgz + C$

إذا فرضنا $E_p(0) = 0$ ⇐ نجد أن $C = 0$ ومنه $\boxed{E_p(z) = mgz}$

وحسب قانون الطاقة الكامنة نجد

$$W_{A \to B} = -\left[E_p\right]_A^B = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right] = -\left[0 - mgR\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{A \to B} = mgR}$$

- مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية: $E(A) = E(B)$

مع: $E(A) = E_c(A) + E_p(A)$ و $E(B) = E_c(B) + E_p(B)$

$E_c(A) = \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$

$E_p(B) = mg.0 = 0$

فنجد: $E_p(A) = E_c(B) \Rightarrow m.gR = \frac{1}{2}mV_B^2$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2Rg}}$$

3 - لكي تصل النقطة إلى C : يعني أن سرعتها عند (C) $V(C) \geq 0$

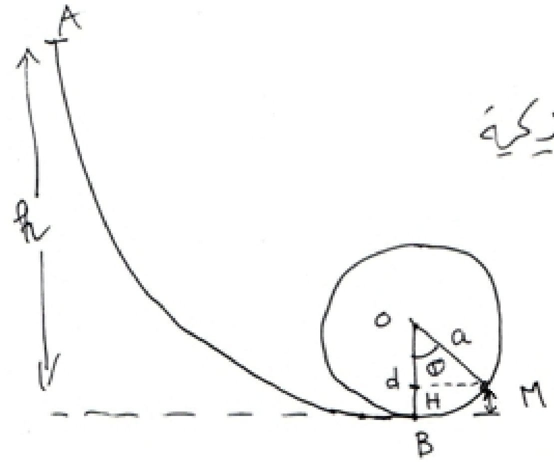
نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة بين A و C : $E(A) = E(C)$

في A لدينا $R=3$ و $V(A)=0$ ، وفي C كذلك $R=3$ ومنه

$E(C)=\frac{1}{2}mV^2(C)+mgR$ ، $E(A)=mgR$ بالمساواة نجد

$V(C)=0$ وبالتالي تصل عند النقطة (C) وتنعدم سرعتها

وتعود نحو النقطة (B) .



- التمرين 03 :

1- نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية

بين (A) و (B) : مع

$V(A)=0$ و $E_p(A)=mgh \Leftarrow E_c(A)=0$

$V(B)\neq 0$ و $E_p(B)=0$

$E(A)=E(B) \Leftarrow mgh=\frac{1}{2}mV_B^2$

فنجد :

$$\boxed{V_B=\sqrt{2gh}}$$

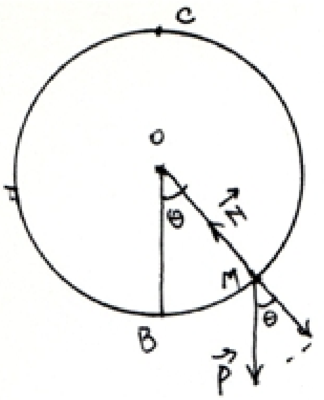
بين (B) و (M) ، حيث M تقع على إرتفاع $H=\overline{OB}-\overline{Od}$

$\overline{OB}=a$ و $\overline{Od}=a\cos\theta \Leftarrow H=a(1-\cos\theta)$

لدينا $E(M)=E(B) \Leftarrow \frac{1}{2}mV^2(M)+mgH=\frac{1}{2}mV^2(B)$

ومنه نحصل على $V(M) \Leftarrow V(M)=\sqrt{2g(h-H)}$

$$\boxed{V(M)=\sqrt{2g\left[h-a(1-\cos\theta)\right]}}$$



2- قوة رد الفعل تكون حسب نصف القطر

من قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{U}_N$:

$$N - P\cos\theta = m\gamma_N = m\frac{V^2}{a}$$

$$\Rightarrow \quad N = mg\cos\theta + m\frac{V^2(M)}{a}$$

- نعوض قيمة السرعة $V(M)$ فنجد :

$$N = mg\left[3\cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right] \Leftarrow N = mg\cos\theta + \frac{m}{a}\cdot 2g\left[h - (1-\cos\theta)a\right]$$

3- لكي تكون حركة الكرة دائرية، يجب أن تبقى ملتصقة دائما بهذا المسار وهذا يستلزم أن رد الفعل يكون دائما غير معدوم ومنه يكون شرط الحركة الدائرية هو : $N > 0$ ، عند أعلى نقطة من المسار فنجد :

$$\theta = \pi \quad \text{عند :} \quad \text{أي} \quad N(c) > 0$$

$$N(c) = \left[\frac{2h}{a} - 5\right] \geqslant 0 \quad \Leftarrow \quad N(c) = \left[3\cdot(-1) + \frac{2h}{a} - 2\right] \geqslant 0 \quad \Leftarrow$$

عندما يصل إلى (C) يجب أن تكون $N = 0$ و $mg = m\frac{V_c^2}{a}$

فنجد أن $\boxed{h \geqslant \frac{5}{2}\cdot a}$ ، عند النفخة (C) النقطة تملك

طاقة كامنة : $E_p(c) = 2amg$ و طاقة حركية : $E_c(c) = \frac{1}{2}mg\cdot a$

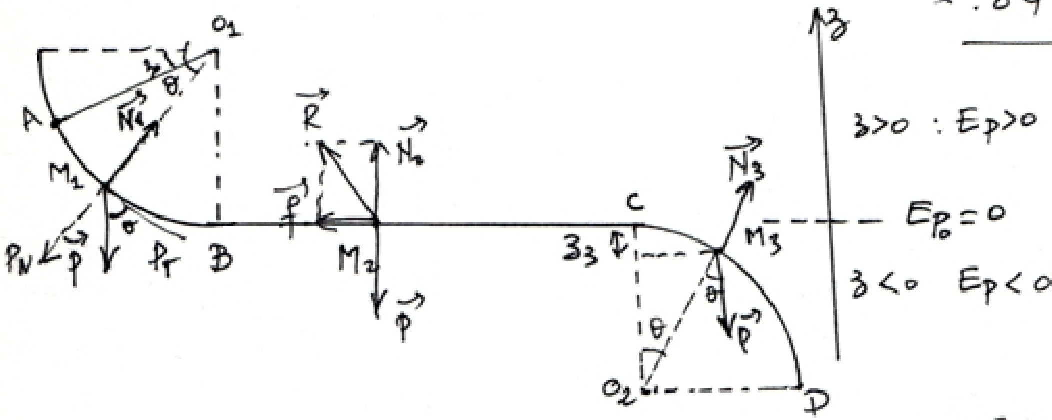
وتكون الطاقة الكلية :

$$E(c) = E_c(c) + E_p(c) = mga\left[2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{2}mg\,a = mgh = E(A)$$

وهو تحقق دائما مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية .

- التمرين 04 :-



1- عند النقطة M_1 يكون رد الفعل ناظمي وفي إتجاه O_1، وهو بالتالي عمودي على السرعة ولا يشارك في العمل المنجز، وتبقى قوة الثقل هي الوحيدة التي تنجز العمل

نعرف أن الثقل هو حسب المحور $\vec{Oz}$ ومن الشكل :

$$\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{k} \Rightarrow \vec{P}=-\vec{grad}\,E_p \Rightarrow \vec{P}=-\frac{dE_p}{dz}\vec{k} \Rightarrow \frac{dE_p}{dz}=mg$$

$\Rightarrow E_p(z)=mgz+C$ ، نأخذ $E_p(0)=0 \Rightarrow C=0$ و $\boxed{E_p(z)=mgz}$

- إيجاد السرعة عند النقطة M_1، نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية بين A و M_1 : $E(M_1)=E(A)$ ، عند النقطة A: $V(A)=0$ ومنه :

$E(A)=E_p(A)=mgh_A$ ، $h_A=R-R\sin 30 \Rightarrow h_A=R-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}R$

فنجد :

$N_1 \quad \frac{1}{2}mV_{M_1}^2+mgh_{M_1}=\frac{1}{2}mgR$

عند M_1: $h_{M_1}=R(1-\sin\theta) \Rightarrow V_{M_1}^2=g(R-2h_{M_1}) \Rightarrow \boxed{V_{M_1}=\sqrt{gR(2\sin\theta-1)}}$

من قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{u}_N$ نجد :

$$N_1-mg\sin\theta_1=m\gamma_{N_1} \Rightarrow \gamma_{N_1}=\frac{V_{M_1}^2}{R} \Rightarrow N_1-mg\sin\theta_1=\frac{m}{R}gR(2\sin\theta_1-1)$$

فنجد : $\boxed{N_1=mg\left[3\sin\theta_1-1\right]}$

عند B :- $\theta_1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{V_B=\sqrt{gR}}$ و $\boxed{N_B=2mg}$

2- في المجال BC، لدينا قوة إحتكاك. لذلك سوف نطبق قانون

تغير الطاقة الميكانيكية : $\Delta E = W(\vec{f})$ ، عند النقطة M_2

نجد : $\boxed{E(M_2) - E(B) = \int_B^{M_2} \vec{f}\cdot d\vec{l}}$ - قوة الإحتكاك عكس الإنتقال

وهي قوة ثابتة تساوي :

$\|\vec{f}\| = -f\|\vec{N}\|$ و $\|\vec{N}\| = mg \Rightarrow \|\vec{f}\| = -fmg$

فنجد العمل المقاوم : $W(\vec{f}) = -\overline{BM_2}\, f.mg \Rightarrow \boxed{E(M_2) - E(B) = -\overline{BM_2}\cdot fmg}$

عند النقطة B لدينا فقط طاقة حركية أي

$E(B) = \frac{1}{2} m V_B^2$

نجد : $E(B) = \frac{1}{2} mgR \Rightarrow \boxed{E(M_2) = \frac{1}{2} mgR - \overline{BM_2}\cdot f.mg}$

عند النقطة M_2 : لدينا كذلك طاقة حركية فقط أي $E(M_2) = \frac{1}{2} m V_{(M_2)}^2$

فنجد : $\frac{1}{2} m V_{(M_2)}^2 = \frac{1}{2} mgR - \overline{BM_2}.f.mg \Rightarrow \boxed{V(M_2) = \sqrt{g\left[R - \overline{BM_2}\cdot f\right]}}$

عندما نصل إلى النقطة (C) تصبح السرعة :

$\boxed{V(C) = \sqrt{g\left[R - \overline{BC}.f\right]}}$

يجب أن يكون : $R - \overline{BC}.f \geqslant 0$

أي يجب أن تكون الطاقة الميكانيكية عند (C) : $E(C) \geqslant 0$

3- عند النقطة M_3 : $z_3 < 0$ والطاقة الكامنة $E_p(M_3) < 0$

نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية بين النقطتين C و M_3

$\Rightarrow E(M_3) = E(C) \Rightarrow E(C) = E_c(C)$ $E(C) = \frac{1}{2} m V_{(C)}^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_{(M_3)}^2 + mg z_3 = \frac{1}{2} mg\left[R - \overline{BC}.f\right]$ مع $z_3 = R\left[\cos\theta - 1\right]$

$\Rightarrow V_{(M_3)}^2 = -2gR\left[\cos\theta - 1\right] + g\left[R - \overline{BC}.f\right]$

$$\boxed{V(M_3) = \sqrt{g\left[R(3 - 2\cos\theta) - \overline{BC}.f\right]}}$$

باستعمال قانون نيوتن وبالإسقاط على $\vec{U_N}$: $mg\cos\theta_3 - N_3 = m\gamma_N$

ونستنتج : $N_3 = mg\cos\theta_3 - m\frac{V_{A3}^2}{R} \Leftarrow$

$\boxed{N_3 = mg\left[5\cos\theta_3 + \frac{\overline{BC}}{R}f - 3\right]} \Leftarrow N_3 = mg\cos\theta_3 - \frac{mg}{R}\left[R\left(3 - 2\cos\theta_3\right) - \overline{BC}\cdot f\right]$

- يغادر الجسم السطح الدائري عندما ينعدم رد الفعل N_3 فنجد :

$\boxed{\cos\theta_3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\frac{\overline{BC}}{R}f} \Leftarrow 5\cos\theta_3 + \frac{\overline{BC}}{R}f - 3 = 0 \Leftarrow N_3 = 0$

من الجزء الثاني $(\overline{BC})$ وجدنا أن : $R - \overline{BC}\cdot f \geqslant 0$ أي أن $\frac{\overline{BC}}{R}f \leqslant 1$

في كل الحالات نلاحظ أن $\boxed{\cos\theta_3 < \frac{3}{5}}$ وهي الحالة عندما يكون $f = 0$

وتمثل أصغر زاوية يمكن أن تفارق النقطة فيها هذا السطح ، أما عندما $f \neq 0$

فإن الزاوية سوف تكون أكبر، وأكبر زاوية نحصل عليها عندما تكون

السرعة في النقطة C : $V(c) = 0$ أي عندما يكون: $R - \overline{BC}\cdot f = 0$

أو $\overline{BC} = \frac{1}{f}\cdot R$ ، وعندما نعوض في علاقة الزاوية السابقة سوف نجد :

و يكون الشرط $\boxed{\cos\theta_{max} = \frac{2}{5}} \Leftarrow \boxed{\cos\theta_{max} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5}$

العام لمفارقة الجسم السطح هو: $\boxed{\frac{2}{5} \leqslant \cos\theta \leqslant \frac{3}{5}}$

من هنا نلاحظ أن الجسم لن يصل مهما كانت سرعته الإبتدائية النقطة

D حيث $\theta_D = \frac{\pi}{2}$

كلما كانت السرعة $V(c)$ كبيرة كلما كانت الزاوية θ صغيرة

وكلما كانت السرعة $V(c)$ صغيرة كلما كانت الزاوية θ كبيرة وتكون

أكبر قيمة لها عندما $V(c) = 0$ وهي توافق $\cos\theta = \frac{2}{5}$

Nom du document : 2013-2012-تمارين العمل و الطاقة
Répertoire : C:\Users\user\Desktop\ملخص الميكانيك\TD
Modèle :
C:\Users\user\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dot
m
Titre :
Sujet :
Auteur : user
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 25/01/2013 18:10:00
N° de révision : 6
Dernier enregistr. le : 25/01/2013 19:39:00
Dernier enregistrement par : user
Temps total d'édition : 89 Minutes
Dernière impression sur : 25/01/2013 19:40:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 11
Nombre de mots : 5 (approx.)
Nombre de caractères : 29 (approx.)